Μάθημα 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 2

ΑΣΚΗΣΗ 1:

$\sigma = (1,4)$, $\tau = (1,4,3,5,6)$, $\rho = (2,3,6,4)$

$\sigma\tau\rho\tau\sigma = (1,4)(1,4,3,5,6)(2,3,6,4)(1,4,3,5,6)(1,4)$

$\sigma\tau\rho\tau\sigma = (1,4,2,5,3,6) \rightarrow O(\sigma\tau\rho\tau\sigma) = 6$

$\rho^3=(2,4,6,3)$

$\sigma\tau\rho^3=(1,4)(1,4,3,5,6)(2,4,6,3)=(2,3)(5,6) \Rightarrow O(\sigma\tau\rho^3)=2$

$\rho^{-1}\tau^{20}=\rho^{-1}=(2,4,6,3)$

$O(\tau)=5 \Rightarrow \tau^{20}=1$, $O(\rho^{-1})=O(\rho)=4$, $\rho^{-1}\rho=1=\rho^4 \Rightarrow \rho^{-1}=\rho^3$

ΑΣΚΗΣΗ 2:

$m\leq n \Rightarrow \Sigma m$ ζει μέσα στη Σn}

$Y\leq \Sigma n$ με $|Y|=m$

$Y=\langle(1,2,\dots,m)\rangle \leq \Sigma n$

Σ_3 Σ_4

Καθε μεταθεση της Σ_3 είναι και μετάθεση της Σ_4 αφήνοντας το 4 σταθερό.

$\{1,2,3\}$ $\{1,2,3,4\}$

ΑΣΚΗΣΗ 4:

$H=\{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$.

$H\leq\Sigma_4$ Αρκεί να είναι η πράξη κλειστή γιατί είναι πεπερ.

$f^2=g^2=h^2=1$

$f\cdot g=(1,2)(3,4)(1,3)(2,4)=(1,4)(2,3)=h$

$gf=(1,3)\cdot(2,4)\cdot(1,2)(3,4)=(1,4)(2,3)=h$

$gh=f=hg$, $fh=g=hf$ Πράξη κλειστή και αβελιανή

$H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ Klein $= \{1, a, b, ab\}$
$a^2 = b^2 = 1$ και $ab = ba$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 7 & 5 & 9 & 8 & 4 & 11 & 3 & 1 & 12 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$= (1,6,4,9)(2,7,11)(3,5,8)(10,12) \rightarrow$ άρτια (αντιμεταθέσεις $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$)

$O(a) = \text{ΕΚΠ}(4,3,2) = 12$

$b = ;$
$O(ba) = 5$
$\gamma = (1,2,3,4,5)$
$O(\gamma) = O(ba) = 5$

$b = \gamma a^{-1} \Rightarrow ba = \gamma a^{-1} a = \gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 6:

$\underbrace{a(1,2,3)a^{-1}}_{\text{άρτια}} = (1,2)\underbrace{(3,4,5)}_{1+2}$

$O(a(1,2,3)a^{-1}) = O(1,2,3) = 3$ Αδύνατο.
$O((1,2)(3,4,5)) = 6$

ΑΣΚΗΣΗ 7:

$\Sigma_3 = \{1, \underset{(1,2,3)}{f}, f^2, \underset{(2,3)}{g}, fg, f^2g\}$

$\Sigma_3 = \langle (1,2,3), (2,3) \rangle$ Σχέσεις $(2,3)(1,2,3)(2,3) = (1,3,2)$

$(1,2,3) = (1,3)(1,2)$

$(1,3)$ και $(1,2) \rightarrow (1,2,3)$

$(1,3,2) = (1,2)(1,3)$

$(1,3)(1,3,2) = (2,3)$

$H = \langle (1,3), (1,2) \rangle \leqq \Sigma_3$

Αρκεί οι γεννήτορες της Σ_3 να είναι στοιχεία της H

! Οι γεννήτορες δεν είναι μοναδικοί. (π.χ. $\mathbb{Z}_3 = \langle [1] \rangle, = \langle [2] \rangle$)

ΑΣΚΗΣΗ 8:

$Y \leq G$, $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in Y$

$\forall a \in G \Rightarrow a \sim a \Leftrightarrow aa^{-1} = 1 \in Y$

Αν $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

$\Updownarrow$

$ab^{-1} \in Y \Rightarrow (ab^{-1})^{-1} \in Y \Rightarrow ba^{-1} \in Y$

Αν $a \sim b$ και $b \sim \gamma \Rightarrow a \sim \gamma$

$ab^{-1} \in Y$ και $b\gamma^{-1} \in Y \Rightarrow ab^{-1}b\gamma^{-1} \in Y \Rightarrow a\gamma^{-1} \in Y \Rightarrow$

$ab^{-1} \in Y \Leftrightarrow ab^{-1}b\, Yb \Rightarrow a \in Yb$

ΑΣΚΗΣΗ 9:

$\mathbb{Z}_{48}$, $Y = \langle 32 \rangle$

$|Y| = O(32) = \dfrac{48}{(48,32)} = \dfrac{48}{16} = 3$

$[O:Y] = \frac{48}{3} = 16$

έχει 16 σύμπλοκα

$Y = \{0, 32, 32+32=64 \equiv 16\}$

$Y, 1+Y, \ldots, 15+Y$

ΑΣΚΗΣΗ 10:

$D_4 = \{1, f, f^2, f^3, g, fg, f^2g, f^3g\}$

$gf^ig = f^i$

$Y = \langle f^2g \rangle = \{1, f^2g\}$, $|Y| = 2 \Rightarrow [D_4:Y] = \frac{8}{2} = 4$

$Y, fY, f^2Y, f^3Y = \{f^3, f^3f^2g\} = \{f^3, fg\}$

ΑΣΚΗΣΗ 11:

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $Y = \langle (1,1) \rangle = \{(1,1), (0,2), (1,3), (0,0)\}$

$|Y| = 4 \Rightarrow [O:Y] = \frac{8}{4} = 2$

Y, $Y + (0,1) = (0,1) + Y$ αβελιανή

$Y \triangleleft O \Leftrightarrow gYg^{-1} = Y$, $\forall g \in O$

$\Leftrightarrow gY = Yg$, $\forall g \in O$.

Ορίσαμε το σύνολο των συμπλόκων: $O/Y = \{gY \mid g \in O\}$ και μια πράξη $gY \circ g'Y = gg'Y$ στο σύνολο O/Y. Είναι καλά ορισμένη.

Είναι ανεξάρτητη από τους αντιπροσώπους;

Αν $g_1Y \overset{(1)}{=} g_1'Y$ και $g_2Y \overset{(2)}{=} g_2'Y \Rightarrow$

$\Rightarrow g_1g_2Y = g_1'g_2'Y$ (3)

(1) $g_1(g_1')^{-1} \in Y$ (2) $g_2(g_2')^{-1} \in Y$

(3) Θέλουμε $g_1g_2(g_1'g_2')^{-1} \in Y$

$g_1\underbrace{g_2(g_2')^{-1}}_{\in Y}(g_1')^{-1} \in Y \Leftrightarrow$

$g_1(g_2(g_2')^{-1})g_1^{-1}\underbrace{g_1(g_1')^{-1}}_{\in Y}$

Επειδή $Y \triangle O \Rightarrow g_1Yg_1^{-1} = Y$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $Y \triangle O$, τότε το σύνολο των συμπλόκων O/Y με πράξη $gY \odot g'Y = gg'Y$ αποτελεί ομάδα και καλείται **ομάδα πηλίκο**.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Πράξη καλά ορισμένη.

Αξιώματα ομάδας:

1) Προσεταιριστική: $(g_1Y \odot g_2Y) \odot g_3Y = g_1Y \odot (g_2Y \odot g_3Y) \Leftrightarrow$

$(g_1g_2Y) \odot g_3Y = (g_1g_2)g_3Y = g_1(g_2g_3)Y = g_1Y \odot (g_2g_3Y) =$

$= g_1Y \odot (g_2Y \odot g_3Y)$

2) Μοναδιαίο-Ουδέτερο: $gY \odot \boxed{1 \cdot Y} = gY$

$gY \odot g^{-1}Y = gg^{-1}Y = Y$

3) Αντίστροφος - Αντίθετος: $(gY)^{-1} = Y^{-1}g^{-1} = Yg^{-1} = g^{-1}Y$

Αν $Y \triangle O \Rightarrow O/Y$ ομάδα με τάξη $|O/Y| = [O:Y] = \dfrac{|O|}{|Y|}$ ($\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$)

όταν ορίζεται

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathbb{Z}$ και $\kappa\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.
Τα σύμπλοκα $a+\kappa\mathbb{Z}$ είναι $0+\kappa\mathbb{Z}, 1+\kappa\mathbb{Z}, \ldots, (\kappa-1)+\kappa\mathbb{Z}$.

$\{[0],[1],\ldots,[\kappa-1]\} = \mathbb{Z}_\kappa = \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $A_3 \triangleleft \Sigma_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$

$A_3 = \langle f \rangle$

$\Sigma_3/A_3 = \{A_3, gA_3\}$ ομάδα

$\mathbb{Z}_2 = \{[0],[1]\}$

$(\Sigma_3/A_3, \odot)$ $(\mathbb{Z}_2, \oplus)$

$A_3 \leftrightarrow 0$
$gA_3 \leftrightarrow 1$

$gA_3 \odot gA_3 = g^2A_3 = 1\cdot A_3 = A_3 \Leftrightarrow O(gA_3) = 2$

$1 \oplus 1 = 0$ $O(1) = 2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί η $\mathbb{Z}_6/\langle 3\rangle$

$Y = \langle 3 \rangle \leq \mathbb{Z}_6$

$|Y| = 2 \Rightarrow |\mathbb{Z}_6/Y| = 3$

$\mathbb{Z}_6/Y = \{Y, [1]+Y, [2]+Y\} \overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \mathbb{Z}_3 = \{[0],[1],[2]\}$

$\mathbb{Z}_3 \nleq \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$Y \longleftrightarrow [0]_3$

$[1]_6 + Y \longleftrightarrow [1]_3$

$[2]_6 + Y \longleftrightarrow [2]_3$

$([1]_6 + Y) \oplus ([1]_6 + Y) = ([1]_6 \oplus [1]_6) + Y = [2]_6 + Y$

$[1]_3 \quad \oplus \quad [1]_3 \quad\quad = [2]_3$

$([2]_6 + Y) \oplus ([1]_6 + Y) = Y \rightarrow o([1]_6 + Y) = 3$

$[2]_3 \oplus [1]_3 = [0]_3 \rightarrow o([1]_3) = 3$

Η $\Phi : \mathbb{Z}_6/_Y \xrightarrow{\text{"1-1"}} \mathbb{Z}_3$ και σέβεται τις πράξεις.

ΠΡΟΣΟΧΗ:

1) $Y \triangleleft G \Rightarrow G/Y$ ομάδα $\not\leq G$

2) $o(gY) = k \quad g^2Y, g^3Y, \dots, g^kY = Y$

$\Leftrightarrow (gY)^k = Y$ και ο k είναι ο μικρότερος

$k \Rightarrow |G/_Y| = [G : Y] = \frac{|G|}{|Y|}$

$Y \trianglelefteq G$ και $o(g) = k \Rightarrow o(gY) = ?$

$\xrightarrow[g^k = 1]{k \mid |G|}$

$(gY)^{k} = g^k Y = 1Y = Y \Rightarrow o(gY) \mid k$

$o(gY) = 3$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω G αβελιανή με $|G| < \infty$ και p πρώτος με $p \mid |G|$. Τότε υπάρχει υποομάδα τάξης p (Χωρίς απόδειξη)

$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_6$

$\pi(1) = 1 + 6\mathbb{Z}$
$\pi(2) = 2 + 6\mathbb{Z}$
$\pi(3) = 3 + 6\mathbb{Z}$
$\pi(4) = 4 + 6\mathbb{Z}$
$\pi(5) = 5 + 6\mathbb{Z}$
$\pi(6) = 6\mathbb{Z}$.

$A = \{6\mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Z}$, $\pi(A) = 6\mathbb{Z}$. ουδέτερο

ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ ΟΜΑΔΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια απεικόνιση $\varphi: O \to G$ μεταξύ ομάδων καλείται **ομομορφισμός** αν ισχύει
$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \underset{G}{\circ} \varphi(b) \quad \forall a, b \in O$

Αν επιπλέον είναι και "1-1" θα καλείται μονομορφισμός
Αν είναι και επί, θα καλείται επιμορφισμός
Αν είναι και τα δύο, ισομορφισμος
$\varphi: O \xrightarrow{\cong} G$, $O \cong G$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:
1) Σύνθεση ομομορφισμών είναι ομομορφισμός
$O \xrightarrow{\varphi} O' \xrightarrow{\varphi'} O''$
$\varphi'\varphi: O \to O''$ είναι ομομορφ.
2) Σύνθεση μονομορφισμων είναι μονομορφισμός
3) Σύνθεση επιμορφισμών είναι επιμορφισμος
4) Σύνθεση ισομορφισμων είναι ισομορφισμός

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2: $\varphi: O \to O'$ μονο
$\varphi': O' \to O''$ μονο

Θέλουμε $\varphi'\varphi : \Omega \to \Omega''$ μόνο

$$\varphi'\varphi(a\cdot\beta) = \varphi'(\varphi(a,\beta)) \underset{\varphi \text{ ομομορφ.}}{=\!=\!=} \varphi'(\varphi(a)\varphi(\beta))$$

$$= \varphi'(\varphi(a))\varphi'(\varphi(\beta)) = \varphi'\varphi(a)\ \varphi'\varphi(\beta) \text{ ομομορφ.}$$

φ' ομομ.

1-1. Έστω $\varphi'\varphi(a) = \varphi'\varphi(\beta) \Leftrightarrow$

$$\varphi'(\varphi(a)) = \varphi'(\varphi(\beta)) \underset{\varphi' : 1-1}{\Leftrightarrow} \varphi(a) = \varphi(\beta) \underset{\varphi : 1-1}{\Leftrightarrow} a = \beta$$